# Oscillations libres dans un circuit RLC série

## Introduction :



Un condensateur et une bobine constituent deux réservoirs d'énergie. Le condensateur peut emmagasiner de l'énergie électrique et la bobine peut emmagasiner de l'énergie magnétique.

- *Que se passe-t-il lorsque un condensateur chargé est branché aux bornes d'une bobine ?*
- *Comment s'effectuent les échanges d'énergie dans un circuit comportant un condensateur et une bobine ?*

## 1. Décharge d'un condensateur dans une bobine :

### 1.1. Oscillations libres amorties :

**Activité 1 :**

- On réalise le montage ci-contre comportant un générateur idéal de tension continue de f.é.m. $E = 6\,V$, un condensateur de capacité $C = 10\,\mu F$, une bobine d'inductance $L = 10\,mH$ et de résistance $r = 5\,\Omega$, un conducteur ohmique de résistance r' réglable et un commutateur.
- On ajuste la résistance du conducteur ohmique sur la valeur $r' = 0\,\Omega$.
- On charge le condensateur en plaçant le commutateur en position 1.
- En basculant le commutateur en position 2, on obtient un circuit RLC série de résistance totale $R = r + r'$.
- Sur la voie $Y_1$ d'un oscilloscope à mémoire, on visualise la tension $u_C$ aux bornes du condensateur. On obtient l'oscillogramme de la figure ci-contre.

1) Décrire et interpréter ce que l'on observe sur l'écran de l'oscilloscope après avoir basculer le commutateur en position 2.
2) Quelle est l'influence de la résistance R sur la tension $u_c(t)$ ? Qu'observe-t-on pour une très grande valeur de R ?
3) On appelle la pseudo-période T des oscillations électriques la durée séparant deux valeurs maximales successives de la tension .
   a) La pseudo-période T dépend-elle de la résistance R ?
   b) Quelle est l'influence de L et de C sur la pseudo-période ?
4) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c$ au du condensateur. Quel est le terme qui traduit l'amortissement des oscillations électriques dans cette équation ?

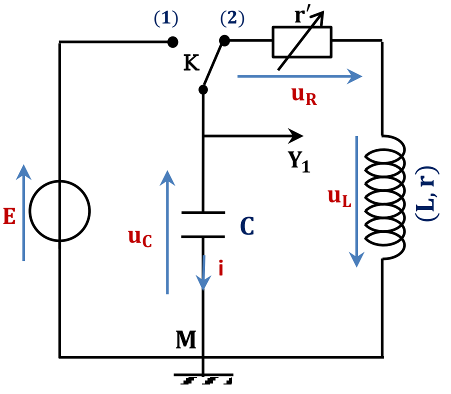
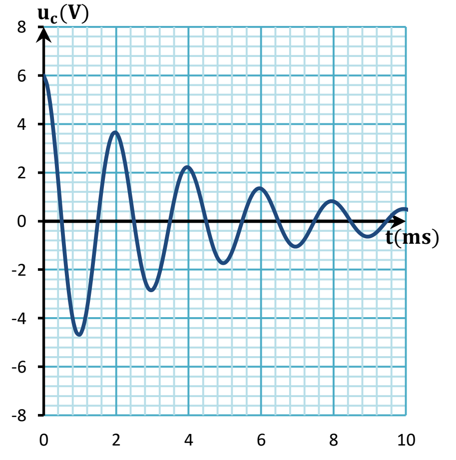



Schéma du montage expérimental



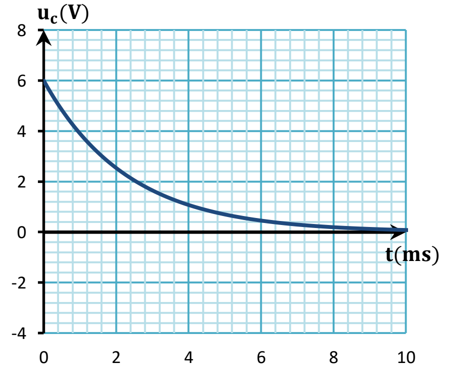

Évolution de la tension $u_c$ (R est faible)
(Régime pseudo-périodique)

La tension $u_C$ aux bornes du condensateur, initialement chargé, d'un circuit RLC série présente des oscillations dont l'amplitude décroît : ce sont des oscillations libres amorties. On dit que le circuit RLC série constitue un oscillateur électrique libre et amorti.

Selon la valeur de la résistance R du circuit RLC, on distingue trois régimes d'oscillations :

- Pour des faibles valeur de R, les oscillations durent longtemps : l'amortissement est faible. **C'est le régime pseudo-périodique.**

  Ce régime est caractérisé par une pseudo-période T qui dépend de l'inductance L et de la capacité C. La pseudo-période T augmente avec L et avec C.
- Pour des valeurs élevées de R, les oscillations disparaissent : la tension tend lentement vers zéro. **C'est le régime apériodique.**



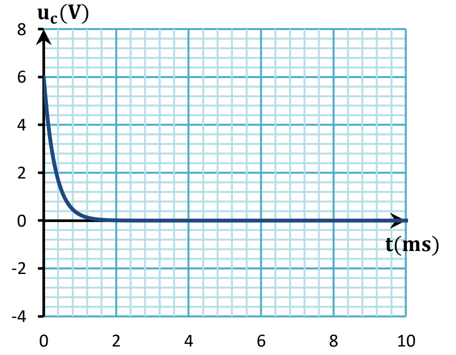

Évolution de la tension $u_c$ (R est grande)
(Régime apériodique)

- Pour la valeur de R qui délimite les deux régimes précédents, appelée résistance critique et notée $R_C$, la tension tend plus rapidement vers zéro sans oscillations. **C'est le régime critique**.

L'équation différentielle du circuit RLC série vérifiée par la tension $u_C$ aux bornes du condensateur est :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}.\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}.u_C(t)=0$$

Le terme $\frac{R}{L}.\frac{du_C(t)}{dt}$ est la grandeur qui traduit l'amortissement des oscillations électriques et qui permet de définir les différents régimes selon la valeur de R.




Évolution de la tension $u_c$ $(R=R_c)$
(Régime critique : $R_c=2.\sqrt{L/C}$ )

## 1.2. Oscillations libres non amorties :

### Activité 2 :

Le circuit ci-contre comporte une bobine d'inductance L, de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C initialement chargé sous une tension E. Ce circuit est appelé circuit idéal LC.

Le graphique ci-contre représente l'évolution de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C$ aux bornes du condensateur.
2) La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$u_C(t)=U_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

$U_m$ , $T_0$ et $\varphi$ sont des paramètres constants indépendants du temps.

a) Déterminer l'expression de $T_0$ en fonctions des paramètres du circuit. Quelle est sa dimension ?
b) En utilisant les conditions initiales $u_c(0)$ et $i(0)$, déterminer les valeurs de $U_m$ et $\varphi$.
c) Déterminer graphiquement les valeurs numériques de $T_0$ et $U_m$.

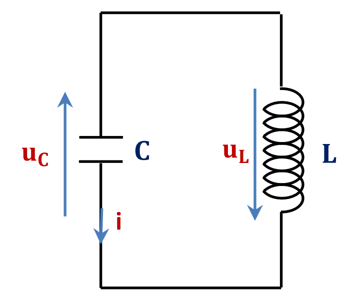
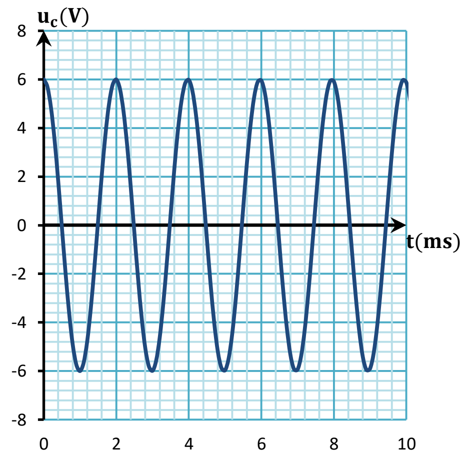



Schéma du circuit idéal LC




Évolution de la tension $u_c$ $(R=0)$
(Régime périodique)

Durant les oscillations électriques libres non amorties d'un circuit idéal LC, la tension $u_C$ aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}.u_C(t)=0$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$u_C(t)=U_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$$

Avec : $U_m$ : amplitude des oscillations en volt (V) ;

$T_0$ : période propre des oscillations en seconde (s) ;

$\varphi$ : phase à l'origine des dates $(t=0)$ en radient (rad) .

La période propre $T_0$ des oscillations ne dépend que de L et de C :

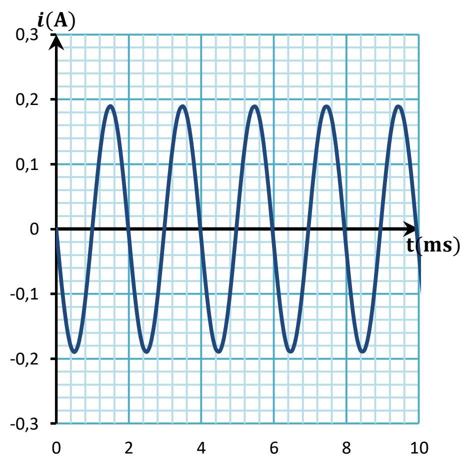
$$T_0=2\pi\sqrt{L.C}$$

La charge électrique du condensateur d'un circuit LC est :

$$q(t)=Q_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\quad \text{avec :}\ Q_m=C.U_m$$

L'intensité du courant dans le circuit LC est :

$$i(t)=-I_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)\quad \text{avec :}\ I_m=\sqrt{C/L}.U_m$$




Évolution de l'intensité $i$ du courant dans le circuit LC.

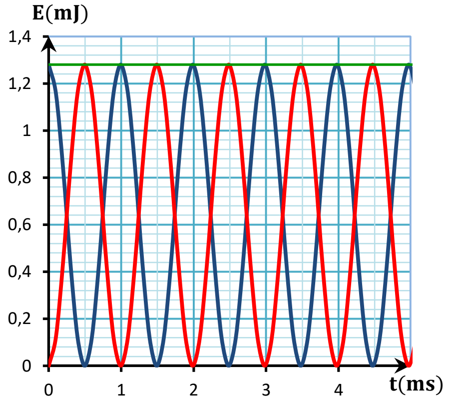
## 2. Transferts d'énergie entre le condensateur et la bobine :

### 2.1. L'énergie dans un circuit LC :

**Activité 3 :**

L'énergie totale $E_t$ d'un circuit idéal LC, circuit oscillant non amorti, est à chaque instant la somme des énergies électrique $E_e$ et magnétique $E_m$ emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine.
La figure montre l'évolution, au cours du temps, des énergies $E_e$, $E_m$ et $E_t$.

1) Comment varie l'énergies $E_m$ lorsque l'énergie $E_e$ diminue ? Et comment varie-t-elle lorsque elle augmente ? Que peut-on en conclure ?
2) Comment varie l'énergie totale $E_t$ au cours du temps ?
3) Donner les expressions de $E_e$ et $E_m$ . En déduire l'expression de $E_t$.
4) Montrer que l'énergie totale $E_t$ du circuit LC est constante.
5) Trouver la le relation entre $U_m$ et $I_m$ les valeurs maximales de la tension $u_c$ aux bornes du condensateur et l'intensité du courant dans le circuit.
6) En exploitant les courbes d'énergie déterminer la valeur de l'énergie électrique initiale $E_e(0)$ dans le circuit et la période propre $T_0$. En déduire les valeurs de la capacité C et l'inductance L.




Évolution des énergies électrique $E_e$, magnétique $E_m$ et totale $E_t$ dans un circuit idéal LC.

L'énergie totale $E_t$ d'un circuit idéal LC est à chaque instant la somme des énergies électrique $E_e$ et magnétique $E_m$ emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine :

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}.C.u_c^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$$

Durant les oscillations non amorties d'un circuit idéal LC, l'énergie électrique dans le condensateur se transforme en énergie magnétique dans la bobine et inversement, tandis que l'énergie totale reste constante (se conserve).

Lorsque $u_c = U_m$ , on a $i = 0$ alors $E_t = E_e = \frac{1}{2}.C.U_m^2 \quad (E_m = 0)$

Lorsque $u_c = 0$ , on a $i = I_m$ alors $E_t = E_m = \frac{1}{2}.L.I_m^2 \quad (E_e = 0)$

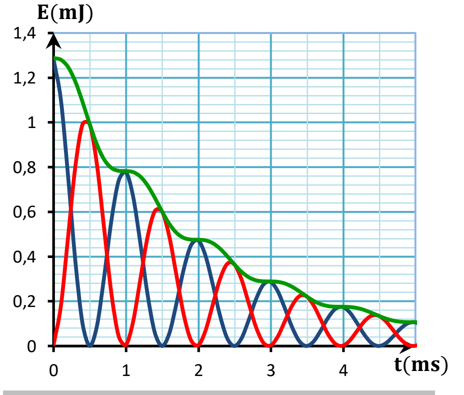
Donc : $\quad E_t = \frac{1}{2}.C.U_m^2 = \frac{1}{2}.L.I_m^2 = Cte$

### 2.2. L'énergie dans un circuit RLC série :

**Activité 4 :**

La figure ci-contre montre l'évolution, au cours du temps, des énergies $E_e$, $E_m$ et $E_t$ dans le circuit RLC série étudié dans l'activité 1.

1) Comment varie l'énergies $E_m$ lorsque l'énergie $E_e$ diminue ? Et comment varie-t-elle lorsque elle augmente ? Que peut-on en conclure ?
2) Comment varie l'énergie totale $E_t$ au cours du temps ?
3) Montrer que l'énergie totale $E_t$ du circuit RLC diminue au cours du temps.
4) Quel phénomène est responsable de cette diminution ?




Évolution des énergies $E_e$, $E_m$ et $E_t$ dans un circuit RLC série.

Durant les oscillations amorties d'un circuit RLC série, l'énergie totale n'est plus constante (ne se conserve pas) , elle diminue au cours du temps.
L'énergie totale du circuit RLC série est :

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}.C.u_c^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$$

On a : $\quad \frac{dE_t}{dt} = C.u_c.\frac{du_c}{dt} + L.i.\frac{di}{dt} = u_c.i + LC.i.\frac{d^2u_c}{dt^2} = i\left(u_c + L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2}\right) = -R.i^2 < 0$

car : $\quad \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}.u_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = -R.i$

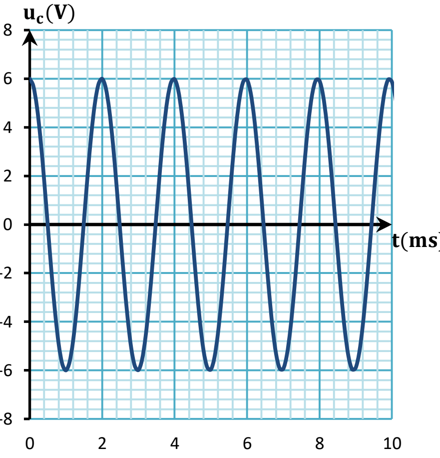
Dans un circuit RLC série, l'amortissement des oscillations est dû à une perte d'énergie par effet joule dans la résistance du circuit.

## 2.3. Entretien des oscillations :

**Activité 5 :**

- On réalise une association en série d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et de résistance r et d'un conducteur ohmique de résistance r'.
- On branche le dipôle RLC aux bornes d'un dispositif d'entretien possédant une alimentation propre (la figure ci-dessous).
- On visualise, avec un oscilloscope, la tension $u_C$ aux bornes du condensateur.
- On ajuste la valeur de $R_0$, résistance de réglage du dispositif d'entretien, pour obtenir des oscillation d'allure sinusoïdale.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C$ .
2) Comment se comporte le dispositif d'entretien dans le circuit ?
3) Quelle valeur doit prendre la résistance $R_0$ pour obtenir des oscillations non amorties ?
4) Quel rôle joue le dispositif d'entretien du point de vu énergétique ?




Oscillations entretenues dans un circuit RLC série

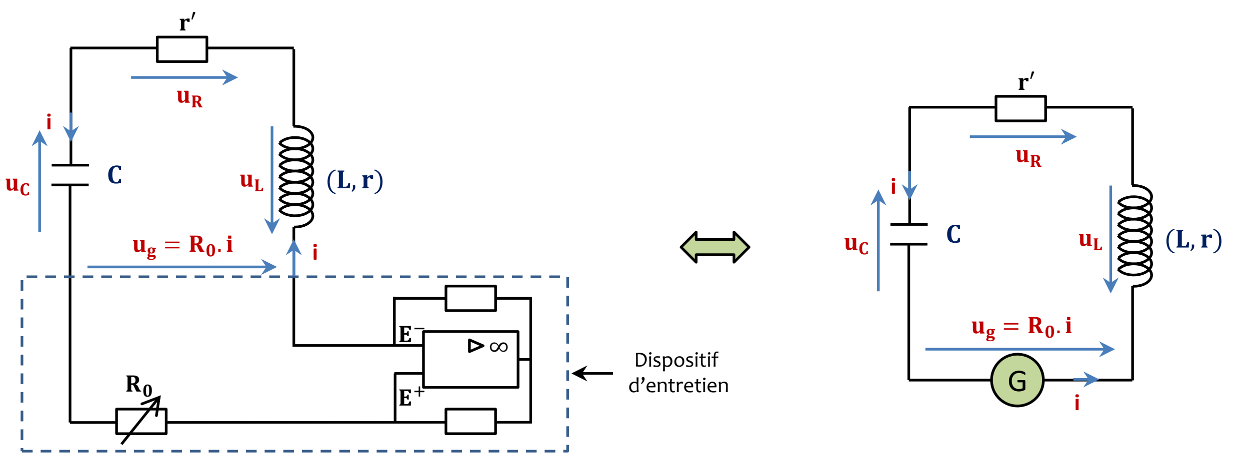



Schéma du montage expérimental (dipôle RLC branché au dispositif d'entretien).

Les oscillations d'un circuit comportant une bobine et un condensateur sont toujours amorties, car le circuit possède toujours une résistance (bobine, fils de connexion). Il en résulte des pertes d'énergie par effet joule qui doivent être compensées si on veut entretenir les oscillations.

Pour entretenir les oscillations dans un circuit RLC série, on ajoute au circuit un générateur (dispositif d'entretien) qui délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant ($u_g = R_0.i$) et qui se comporte comme une résistance négative.

L'équation différentielle du circuit RLC devient :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{(R - R_0)}{L}.\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}.u_c = 0$$

Lorsqu'on ajuste la résistance $R_0$ sur la valeur de la résistance R, l'équation devient :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_c = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un circuit idéal LC.

Dans ce cas les oscillations sont sinusoïdales de période : $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

**Application :**

On réalise le montage expérimental représenté sur la figure (1) qui comporte:

- un générateur idéal de tension de force électromotrice $E = 6V$;
- un condensateur de capacité C;
- un conducteur ohmique de résistance $R$;
- une bobine $b$ d'inductance $L$ et de résistance $r$;
- un interrupteur K.

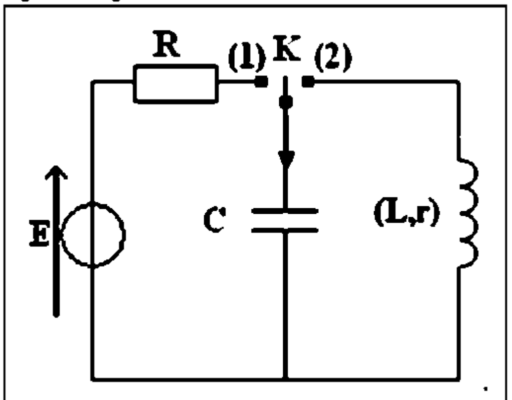


Figure 1

**1.** On place l'interrupteur dans la position (1), le condensateur se charge totalement. Sa charge maximale est $Q_{max} = 1{,}32.10^{-4} C$.

Calculer la valeur de l'énergie électrique maximale $E_{e,max}$ emmagasinée dans le condensateur.

**2.** On réalise trois expériences en utilisant trois bobines différentes $b_1$, $b_2$ et $b_3$ dont les caractéristiques sont:

$b_1(L_1 = 260\ mH\ ;\ r_1 = 0)$ , $b_2(L_2 = 115\,\text{mH}\ ;\ r_2 = 0)$ et $b_3(L_3\ ;\ r_3 = 10\ \Omega)$

Dans chaque expérience, on charge totalement le condensateur et on le décharge dans l'une des trois bobines.

Les courbes de la figure (2) représentent les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

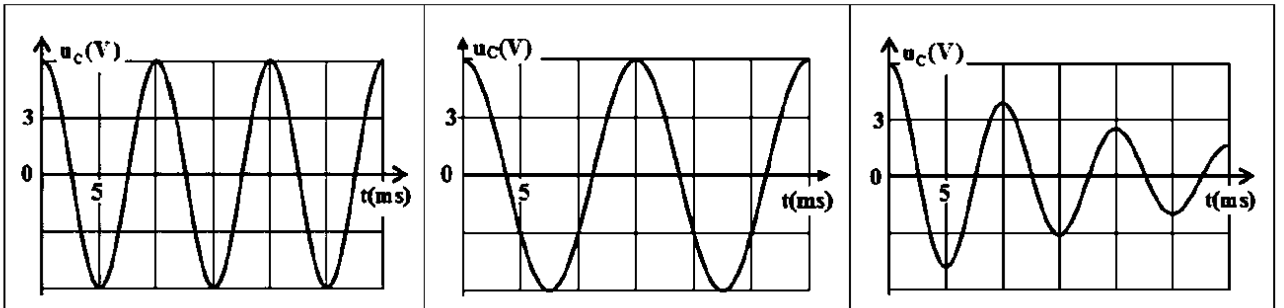


Figure 2

**2.1.** Nommer les régimes d'oscillations mis en évidence par les courbes (a) et (c).

**2.2.** En comparant les périodes des oscillations électriques, montrer que la courbe (a) correspond à la bobine $b_2$.

**2.3.** Vérifier que $C \simeq 2{,}2.10^{-5} F$.

**3.** On considère le cas de la décharge du condensateur à travers la bobine $b_2(L_2 = 115\,\text{mH}\ ;\ r_2 = 0)$. Dans ce cas le circuit LC est idéal.

**3.1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$.

**3.2.** la solution de l'équation différentielle s'écrit: $u_c(t) = U_{C\max}.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

**3.2.1.** Écrire l'expression numérique de la tension $u_c(t)$.

**3.2.2.** Calculer l'énergie totale du circuit LC sachant qu'elle se conserve.

**4.** On considère le cas de la décharge du condensateur à travers la bobine $b_3(L_3\ ;\ r_3 = 10\Omega)$.

Pour entretenir les oscillations électriques, on ajoute au circuit un générateur qui délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant $u_g = k.i(t)$ où $k$ est une constante positive. On obtient des oscillations électriques sinusoïdales de période T=10 ms.

**4.1.** Déterminer la valeur de $k$.

**4.2.** En déduire la valeur de $L_3$.